CRM Centre de Recerca Matemàtica
Excelencia María de Maeztu 2022 - 2025
fcri Fundació Catalana per a la Recerca i la Innovació

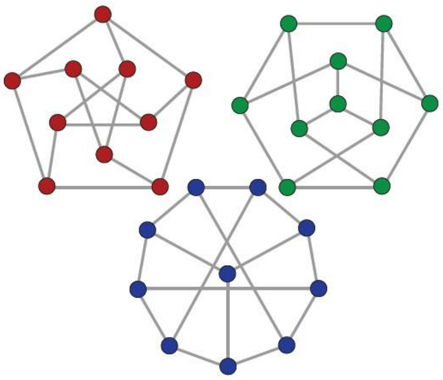
Teoria de Grafs

CIÈNCIA A LES ESCOLES

Institut d'Estudis Catalans
Generalitat de Catalunya
CERCA Centres de Recerca de Catalunya
HR Excellence in Research
Universitat Politècnica de Catalunya BarcelonaTech
Universitat de Barcelona
UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Teoria de grafs: explicació

Imagina que tens un grup d'amics i vols saber com estan tots connectats entre ells. Alguns es coneixen molt bé, mentre que d'altres no s'han conegut mai. Com podem mostrar aquestes connexions de manera divertida? Aquí és on entra la teoria de grafs!



Els Elements Bàsics de la Teoria de Grafs

- **Punts (o Nodes):** Pensa en aquests com si fossin punts en un full de paper. Cada punt representa una cosa, com tu, els teus amics o fins i tot diferents ciutats.
- **Línies (o Arestes):** Aquestes són les línies que connecten els punts. Si dos amics es coneixen, dibuixem una línia entre els seus punts. Si dues ciutats tenen una carretera entre elles, dibuixem una línia que les connecta.
- **Un Graf:** Quan posem punts (dibuixos) i línies junts, creem un graf! És un dibuix que ens ajuda a veure totes les connexions.

Com Funcionen Els Grafs

Suposem que tens 5 amics: l'Alícia, en Biel, en Carles, la Dàlia i l'Eduard. L'Alícia coneix en Biel i en Carles, en Biel coneix l'Alícia i la Dàlia, i en Carles coneix l'Alícia i l'Eduard. Podem dibuixar un graf per mostrar-ho:

- Dibuixem 5 punts: un per a l'Alícia, un per a en Biel, un per a en Carles, un per a la Dàlia i un per a l'Eduard.
- Dibuixem línies entre els punts per mostrar qui coneix a qui.

Quan acabem, podem veure fàcilment qui és amic de qui!

La teoria de grafs és una manera d'utilitzar dibuixos senzills (amb punts i línies) per entendre tot tipus de connexions en el món que ens envolta!

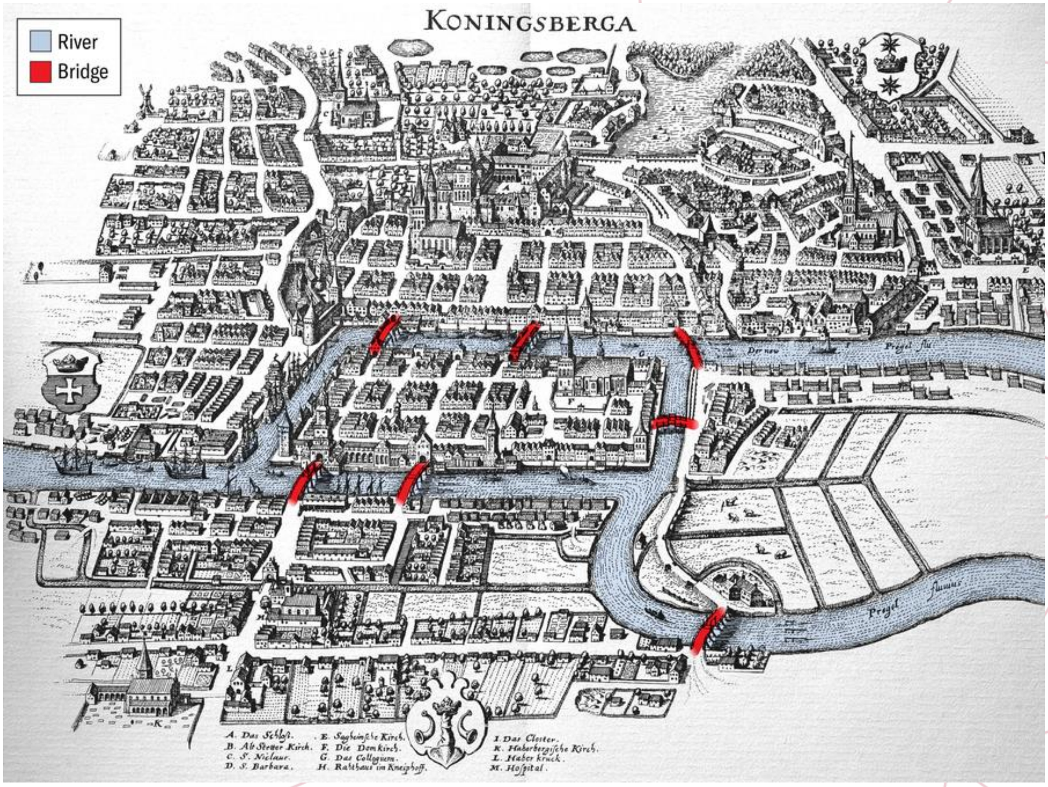
Una mica d'història: els set ponts de Königsberg

Al segle XVIII, entre els habitants de la ciutat prussiana de Königsberg (avui coneguda com a Kaliningrad, Rússia), es va fer molt popular un trencaclosques peculiar: era possible recórrer les quatre parts de la ciutat creuant cadascun dels seus set ponts només una vegada? Els ponts en qüestió connectaven les diferents parts de la ciutat travessant un riu que contenia dues grans illes. Per molt que intentessin trobar la ruta correcta, els habitants de Königsberg no podien evitar repetir algun pont.

Aquest aparentment senzill problema va demostrar ser més complicat del que semblava i va acabar cridant l'atenció d'un matemàtic suís anomenat Leonhard Euler. Amb la seva creativitat i habilitats matemàtiques, Euler va aconseguir resoldre el misteri i, sense adonar-se'n, va fundar una nova branca de les matemàtiques.

Convertint una ciutat en un graf

Imaginem per un moment que vivim a Königsberg. A continuació teniu un mapa de la ciutat; podríeu trobar un camí que passés per tots els ponts només una vegada? Agafeu-vos el temps que necessiteu... (No patiu, més endavant us donarem la resposta!)

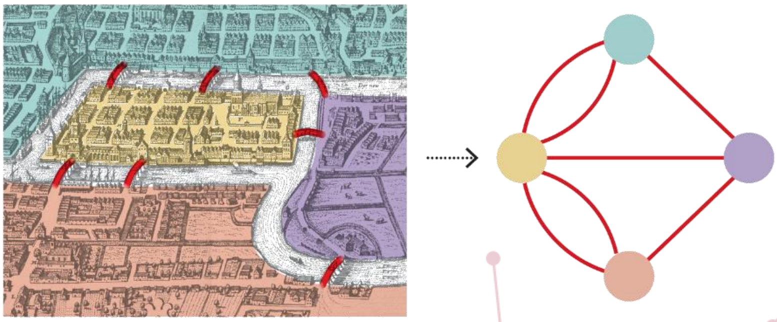


La ciutat prussiana de Königsberg, que ara es coneix com Kaliningrad a Rússia, a l'edat mitjana.

Euler va enfocar-ho com enfocaria qualsevol problema matemàtic. El primer que va fer és eliminar tota la informació innecessària fins que només quedessin els elements essencials, un procés que s'anomena *abstracció* i que permet als matemàtics traduir un problema complex a una representació més intuïtiva.

Moltes característiques del mapa no afecten la qüestió plantejada; la longitud dels ponts, la mida de les illes o fins i tot l'orientació geogràfica de la terra i els ponts no són rellevants. L'únic que importa és quines parts de terra estan connectades amb quines altres, i quantes vegades. Així, podem crear un diagrama molt més senzill, format només per cercles i línies per representar, respectivament, les terres i els ponts.

Imaginem que dibuixem un punt per a cada part de la ciutat i una línia per a cada pont que connecta dues parts. Això crea una mena de dibuix o "graf" format per punts (que anomenem "vèrtexs") i línies (que anomenem "arestes"). En aquest cas, cada vèrtex representa una illa o part de la ciutat, i cada aresta representa un pont.



La solució d'Euler

Euler va demostrar que el problema dels set ponts de Königsberg era impossible de resoldre perquè, per tal de creuar tots els ponts exactament una vegada, el graf havia de complir una condició específica: només podia tenir 0 o 2 vèrtexs amb un nombre imparell de ponts connectats. Aquesta condició es deu al fet que, cada vegada que entrem en una part de la ciutat (representada com un vèrtex en el graf), hem de sortir-ne per un altre pont. Per tant, la majoria de vèrtexs han de tenir un nombre parell de ponts (arestes) connectats, excepte el punt d'inici i el de final (si són diferents).

A Königsberg, però, totes les parts de la ciutat tenien un nombre imparell de ponts connectats als vèrtexs. Això significa que no hi ha cap camí que permeti creuar tots els ponts exactament una vegada, cosa que fa que el problema sigui irresoluble.

REPTE 1: Els amics de l'escola

Instruccions per als alumnes:

1. **Feu grups de 5-6 persones de forma aleatòria:** Cada persona serà representada com un vèrtex en un graf i cada grup construirà un graf.

2. **Construïu un graf:**

   - El graf es basarà en qui parleu més sovint al pati. Amb cada persona del grup amb qui solgueu anar al pati, dibuixeu una línia (una aresta) entre els vèrtexs que representen aquestes dues persones.

3. **Acoloriu el graf:**

   - L'objectiu és assignar un color a cada vèrtex (persona) del graf de manera que cap parella de persones connectades (és a dir, aquelles que parlen entre elles) tingui el mateix color.
   - Els vèrtexs adjacents (connectats) sempre han de tenir colors diferents.

4. **Reflexió i investigació:**

   - **Quants colors mínims heu utilitzat per a la classe sencera?**

   Com a mínim n'hauran necessitat 2.

   - **Quin ha estat el màxim nombre de colors que heu necessitat?**

Segons el teorema que explicarem després, com a màxim haurien de sortir 4 colors si no és que hi ha hagut encreuaments en el graf i no hi ha hagut errors en pintar-los.

- **Hi ha hagut encreuaments d'arestes en el vostre graf?**

A. Primer pas: assegurar-se que no es podia representar diferent el graf sense encreuaments redistribuint els punts.

B. En cas que així i tot hi hagi encreuaments, ja estem preparats per formular nosaltres mateixes el teorema:

El nombre màxim de colors a utilitzar en un graf sense encreuaments per acolorir vèrtexs de forma que els vèrtexs adjacent no comparteixin colors és 4.

- **Investigueu el *Teorema dels 4 colors*, que diu que en grafs sense encreuaments d'arestes, com a màxim necessitem 4 colors per pintar-los.**

Si heu tingut encreuaments, quants colors heu necessitat?

Repte 2: La festa d'aniversari

Anem a posar en pràctica la teoria de grafs. A la petita ciutat de Vilamates, hi ha 12 matemàtics celebrant el seu aniversari en la mateixa setmana.

Adam, Bella, Charlie, Dan, Ed, Frank, Gustavo, Harry, Ian, Jack, Kim, Lilly.

Malauradament, tenen amics en comú que han estat convidats a dues festes alhora. Per exemple, en Xavier l'han convidat tant a la festa de l'Adam com a la de la Bella. A continuació, es llisten les parelles de persones que tenen amics en comú:

Adam – Bella, Adam – Gustavo, Adam – Lilly

Bella – Charlie, Bella – Frank

Charlie – Dan, Charlie – Kim

Dan – Ed, Dan – Jack

Ed – Frank, Ed – Ian

Frank – Gustavo

Gustavo – Harry

Harry – Ian, Harry – Lilly

Ian – Jack

Jack – Kim

Kim – Lilly

Els veïns de Vilamates no els agrada el soroll, així que han demanat que les festes es programin en el mínim nombre possible de franges horàries diferents.

- Tenint això en compte, com programaríeu les festes perquè totes les persones puguin anar a totes les festes a les quals han estat convidades?
- Quantes franges horàries has trobat?

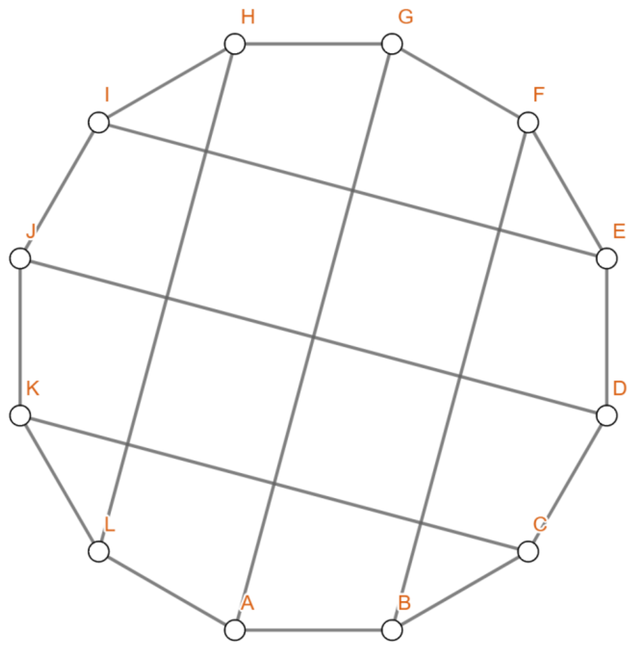
Passa la pàgina per veure una pista de com podem resoldre-ho matemàticament.

PISTA:

El problema de programar les festes es pot simplificar en un problema de coloració de grafs.

Les persones que celebren el seu aniversari es poden representar com a nodes (els punts) en un graf. Això formaria, en aquest cas, un graf de 12 nodes. Si dues persones tenen amics en comú, unim els dos nodes corresponents amb una aresta (línia). Per exemple, hi haurà una aresta entre Adam i Bella, una altra entre Adam i Gustavo, ja que tenen amics en comú.

Exemple:



Deixem que el color d'un node representi una franja horària d'aniversari. Com que les arestes representen amics convidats en comú, essencialment volem pintar els nodes de manera que cap aresta apunti a dos nodes del mateix color. A més, volem trobar la quantitat mínima de colors diferents necessaris per a això.

Intenta pintar el graf utilitzant el nombre mínim de colors. Quants colors necessites? (El nombre de colors que hagis utilitzat serà el nombre de franges horàries on s'hauran de celebrar les festes d'aniversari.)

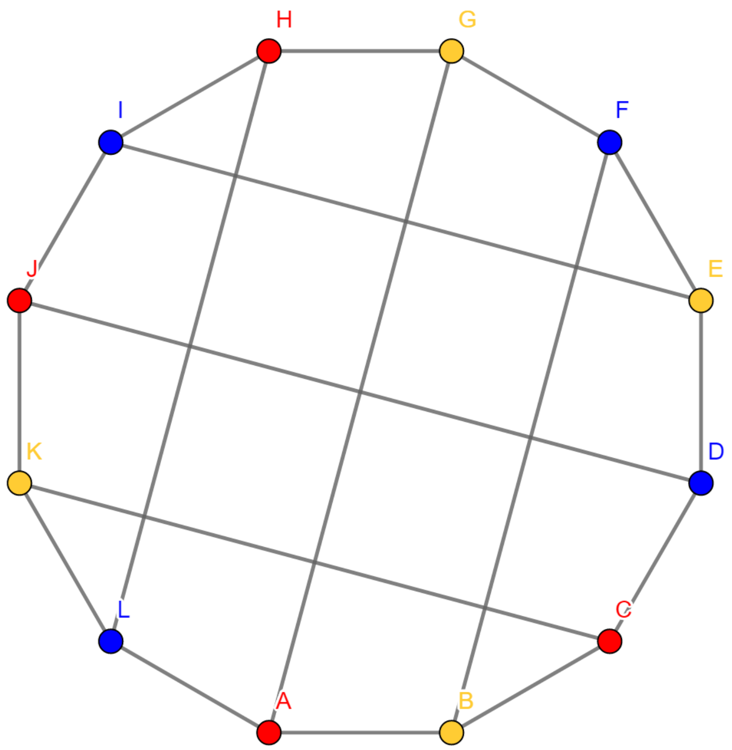
Recorda! Has de seguir aquesta regla: si dos nodes estan units per una línia, no poden tenir el mateix color.

SOLUCIÓ:

Aquesta no és l'única manera de pintar el graf, però mostra que només es necessiten tres colors. Dos no serien suficients:

Suposem que només podem utilitzar dos colors: vermell i blau.

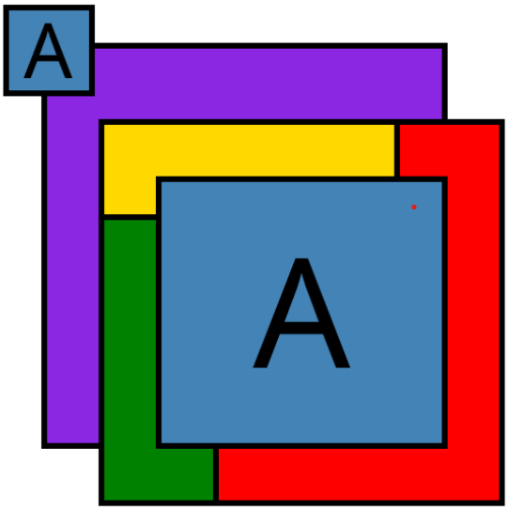
- Sigui A de color vermell.
- Llavors L i B han de ser blaus.
- L és blau, així que K ha de ser vermell.
- K és vermell, així que C ha de ser blau, PERÒ B és blau, per tant, C ha de ser vermell.
- C no pot ser alhora vermell i blau, així que necessitem un altre color.



Per tant, hi ha d'haver tres dies diferents per celebrar les festes d'aniversari.

ACTIVITATS EXTRES:

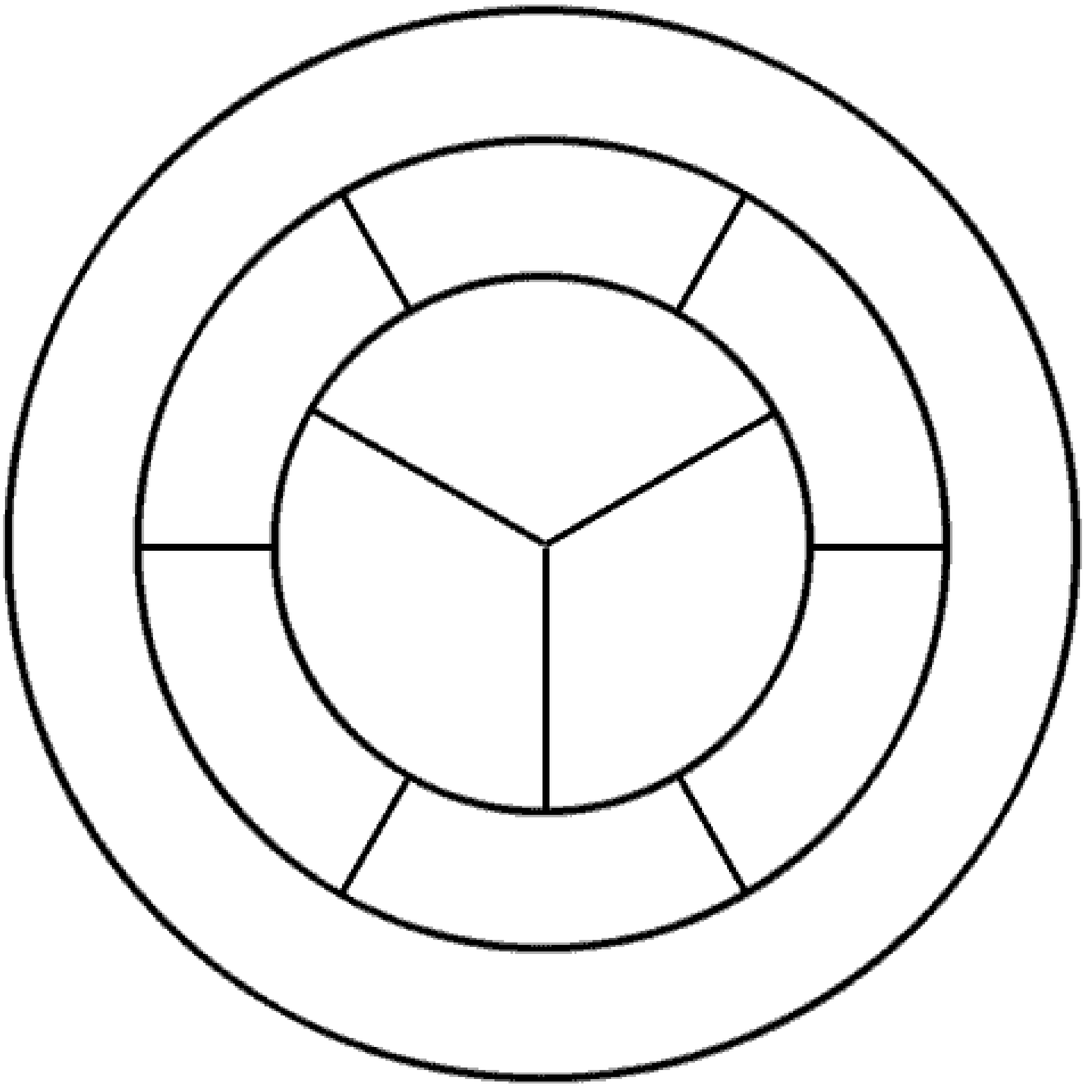
- On creieu que en alguna assignatura podeu trobar aquest teorema aplicat?
  - En els mapamundi! Fixeu-vos com es pinten els mapes.
  - Però… I si les fronteres de països no fossin contínues com és el cas de USA amb Alaska, per exemple? Doncs aquí veiem que no compleix part de les condicions del teorema, que ens diu concretament "Donat qualsevol mapa geogràfic amb regions contínues, aquest pot ser pintat amb quatre colors diferents o menys, de manera que no quedin regions adjacents amb el mateix color." Veure imatge de sota:



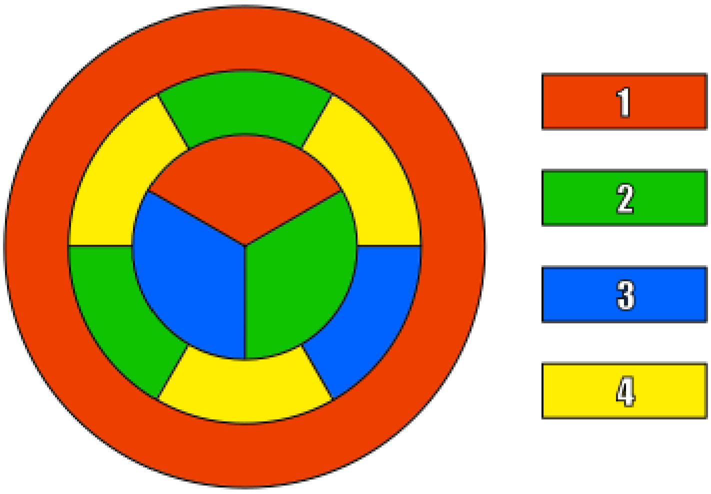
  - Si es vol, es pot explorar que aquests encreuaments impliquen que la regió en el mapa no és contínua.

ARA, ANEM A PLANTEJAR TRES EXERCICIS EXTRA:

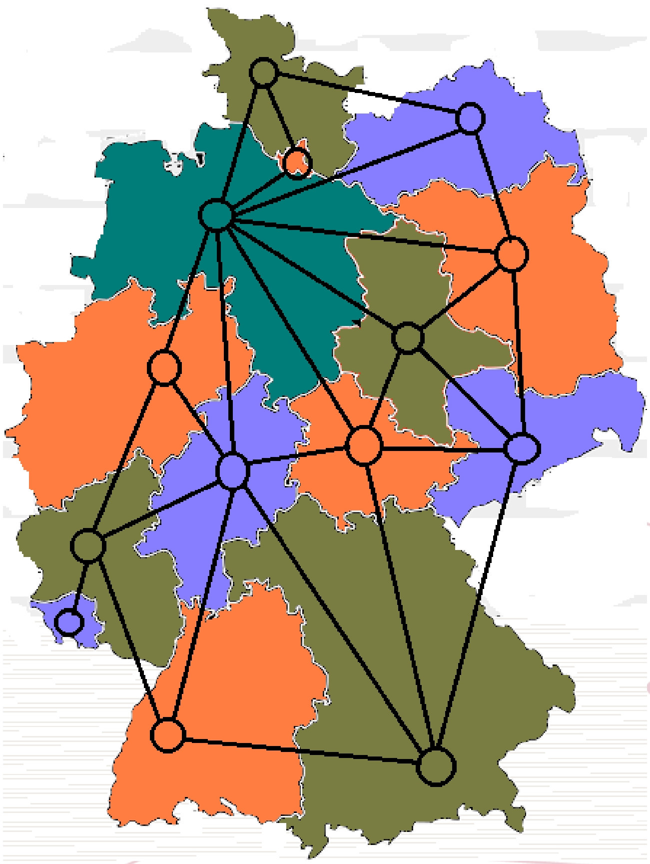
1. **Intenteu pintar el mapa següent de manera que dos espais adjacents no tinguin el mateix color, utilitzant el mínim nombre de colors possible. Quants colors heu utilitzat?**



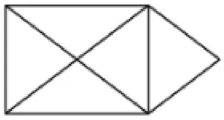
Solució: Els colors poden redistribuir-se i el número 4 ser el 2, etc. Si veieu que surten més de 4, és que no s'ha escollit bé l'ordre de com començar a pintar.

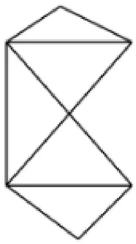


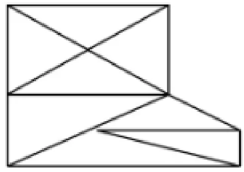
Sobre aquest mapa, es pot construir un graf agafant el punt cèntric de cada regió i unint-los amb la resta, com es fa en el següent mapa:



1. **Quin dels següents grafs no es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper i sense dibuixar dues vegades la mateixa aresta?**
   Aquí l'alumnat pot dedicar una estona a intentar buscar camins per no aixecar el llapis i poder recórrer tot el graf sense dibuixar dues vegades la mateixa aresta. Estem intentant descobrir què són els camins eulerians!

A) 

B) 

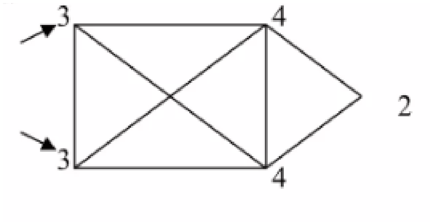
C) 

Per resoldre aquest exercici cal analitzar el grau (amb quants altres vèrtexs està connectat) de cada vèrtex. Per tal que es pugui dibuixar segons les condicions demanades, ha de passar una de les següents condicions:

- Tots els graus són parells, aleshores diem que és un graf eulerià, és a dir, admet un circuit eulerià (només passem una vegada per cada vèrtex).
- Dos i exactament dos vèrtexs tenen grau imparell, aleshores es podria dibuixar un camí eulerià que comenci en un dels vèrtexs de grau imparell i acabi en l'altre.

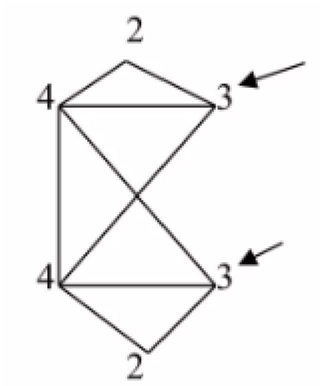
Solució:

Graf A:



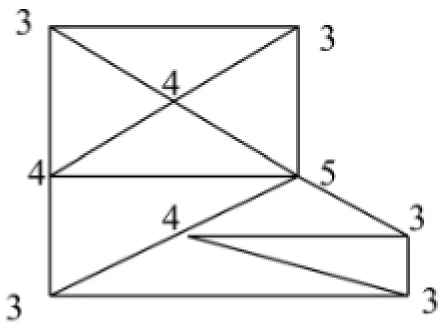
Admet un camí eulerià, començant per un dels vèrtexs assenyalats amb la fletxa i acabant per l'altre.

Graf B :



Igual que el graf A.

Graf C:



Té més de dos vèrtexs de grau imparell, de forma que no podem construir un camí eulerià i passar més d'una vegada per la mateixa aresta i aixecar el llapis del graf.

Contacte per qualsevol dubte:

Pau Varela Rodriguez
pvarela@crm.cat
Tel.: 93 581 1081